Produktregel:

$$y = uv \quad y' = u'v + uv'$$

Quotientenregel:

$$y = \frac{u}{v} \qquad y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Kettenregel:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx}$$ oder y'=F'(u) * u'(x) („Äußere Ableitung mal innere Ableitung")

z.B.: $y=(4x^2-2x+1)^5$ wird zu:
$y= u^5$
$y'=5u^4$ (äußere) * $(8x-2)$ (innere)$=10(4x-1)*u^4$

→ u wieder zurückersetzen:

$y'=10(4x-1)(4x^2-2x+1)$

Mittelwertsatz:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$$

Ist f'(x)>0, zw. A und B, dann streng monoton steigend! Bzw. ist der Nenner positiv, wird xi positiv, also streng monoton steigend!

$$\frac{f(x2)-f(x1)}{x2-x1} = f'(\xi)$$

Bekannte Ableitungen:

f(x)	f'(x)
x^n	$n*x^{n-1}$
Sin(x)	Cos(x)
Cos(x)	-Sin(x)
Tan(x)	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
Cot(x)	$-\frac{1}{\sin^2(x)}$
e^{3x}	$3e^{3x}$
a^x	$(\ln a)*a^x$
ln x	$\frac{1}{x}$
$x\sqrt{x} = x^{3/2}$	$3/2\ x^{1/2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$
10^x	$\frac{1}{x \ln 10}$
-sin(x)	-cos(x)
-cos (x)	Sin(x)
Cos(3x)	-3 Sin(3x)
$i^{(5x^2)}$	$10 i^{(5x^2)} * x$

Allgemeine wichtige Formeln:

ln a/b = ln a – ln b

$\text{Cos}(x)=\text{Sin}(x+\frac{\pi}{2})$

$\text{Sin}^2(x) + \cos^2(x)=1$

Newton-Annäherungsverfahren: (Tangentenverfahren)

x_0= Näherungswert abschätzen (evtl. aus Skizze)

Erste Iteration bzw. Allg.Formel:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\ usw.$$

Beispiel: $\sqrt[5]{11}$ soll berechnet werden!
Lösung:

1) Formel erstellen
$x=\sqrt[5]{11}$

2) Formel umstellen:
$x^5=11$
$f(x)=x^5-11=0$ → $f'(x)=5x^4$

3) Startwert „ermitteln":
$x_0=2$

4) Einsetzen/Ausrechnen:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \frac{2^5-11}{5*2^4} = 2 - \frac{21}{80} = 1{,}7375$$

Taylor Polynom:

mit: $T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

Beispiel:
Taylorpolynom 2ten Grades mit Entwicklungspunkt $x_0=0$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

1) Vereinfachen:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}=(1+x)^{\frac{1}{2}}$$

2) Ableitungen bilden:

$$f'(x)=1*(-\frac{1}{2})*(1+x)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f''(x)=\frac{3}{4}*(1+x)^{-\frac{5}{2}}$$

3)Werte der Ableitungen an der Stelle x_0:
$f'(x_0)=-1/2$
$f''(x_0)=3/4$

4)Aufstellen der Gleichung

$$T_2(x)=\sum_{k=0}^{2}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

$$T_2(x)=\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

5) Wert der Lösung bestimmen:
Bspw.: für x=0,2:
Ergebnis: 0,915

6) Fehlerabschätzung:
1. Möglichkeit:
Ausrechnen mit Taschenrechner und relativen Fehler angeben, mit: 0,913 aus Taschenrechner
100-(0,915*100/0,913)=0,219 %
2. Nach Lagrange

Additionstheoreme:

sin(2a) = 2 sin a cos a
cos(2a) = cos2a - sin2a
sin(a + b) = sin a cos b + cos a sin b
cos(a + b) = cos a cos b - sin a sin b

Restgliedabschätzung nach Lagrange:

Taylorpolynom + Restglied
(Fehlerausgleich)

$$R_n(x,x_0)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Beispielrechnung:
1) Aufstellen der Gleichung:

$R_2(x,x_0)=\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-x_0)^3$ wobei ξ zwischen x_0 und x liegt.

2) Bilden der benötigten Ableitung (eins höher, als für Taylor verwendete!)z.B.:

$$f'''(x)=-24(4x+1)^{-\frac{3}{2}}=\frac{-24}{(4x+1)^{\frac{3}{2}}}$$

3) Einsetzen von x_0:

$$R_2(x,2)=\frac{-24}{(4\xi+1)^{\frac{3}{2}}*3!}(x-2)^3$$

4) Einsetzen von x:

$$R_2(2{,}5;2)=\frac{-24}{(4\xi+1)^{\frac{3}{2}}*6}(2{,}5-2)^3=\frac{-4}{8(4\xi+1)^{\frac{3}{2}}}$$

5) Ausrechnen von ξ durch Einsetzen von x bzw. x_0, weil $\xi \in (x,x_0)$:
Fehler max. werden lassen, dies ist hier bei größtem Nenner der Fall.

Implizit Differenzieren:

Differenzieren, einer gegebenen Formel:

Beispiel: $\ln\left(\frac{p}{p_0}\right)=\alpha*h$

Es soll durch ID die Druckänderung mit der Höhe h ermittelt werden.

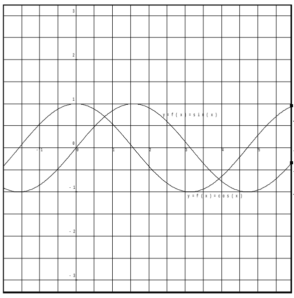
Also: $\frac{dp}{dh}$ *bilden*

$$\ln\left(\frac{p}{p_0}\right)=\alpha*h \rightarrow \left(\frac{p}{p_0}\right)=e^{\alpha*h}$$

$\rightarrow p=e^{\alpha*h}*p_0 \rightarrow p=e^{\alpha}*e^{h}*p_0$

PQ-Formel:

$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)-q}$ unter der Vorraussetzung,
dass gilt:
$x^2+px+q=0$ (also z.B.: $-2x^2-4x+6=0 \rightarrow x^2+2x-3=0$



Sinusverlauf: Der Sinus schneidet die x-Achse bei π,2 π,3 π usw.
y-Werte nie größer 1, kleiner -1.
Der Cosinus ist nur um π/2 verschoben.

sin(2x)=2sin(x)cos(x)

Bestimmtes Integral durch Substitution

$$\int_3^8 \frac{x*dx}{\sqrt{1+x}} \text{ bzw. } \int_3^8 x*(1+x)^{-\frac{1}{2}}$$

1) Substitution wählen:
   t= $\sqrt{1+x}$
2) Sinvoll umstellen:
   x=t²-1
   t²=1+x

3) Neue Grenzen berechnen
mit t= $\sqrt{1+x}$ neue Grenzen ausrechnen, indem a bzw. b für x eingesetzt werden!
„Neue Variable – Neue Grenzen“

hier also: $\int_3^8 -> \int_2^3$

3) dt nach dx differenzieren:

$$\frac{dt}{dx} = 1*\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$dt = \frac{1}{2*\sqrt{1+x}}dx$$

$$dx = dt*2*\sqrt{1+x}$$

$$dx = dt*2*t$$

4) Integral aufstellen:

$$\int_2^3 \frac{t^2-1}{t}*2t*dt$$

$$= 2*\int_2^3 t^2-1*dt$$

$$= 2*\int_2^3 t^2*dt - \int_2^3 1*dt$$

$$= 2*\left(\left[\frac{1}{3}t^3\right]_2^3 - \left[\frac{1}{1}t\right]_2^3\right) = 2*\left((9-\frac{8}{3})-(3-2)\right)$$

$$= 2*(\frac{19}{3}1) = 32/3$$

Stichworte: 1 Aufgeleitet ist t!
obere Grenze minus untere Grenze!

Unbestimmtes Integral durch partielle Integration

$$\int f(x)dx = u(x)*v(x) - \int u(x)*v'(x)*dx$$

Bsp.:

$$\int x^2*\ln(x)dx \qquad u = \frac{1}{3}x^3 \qquad \text{v=ln(x)}$$

$$\text{u'=x}^2 \qquad \text{v'=1/x}$$

$$= \frac{1}{3}x^3*\ln(x) - \int \frac{1}{3}x^3*\frac{1}{x}*dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3*\ln(x) - \int \frac{x^2}{3}dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3*\ln(x) - \frac{1}{9}x^3$$

Grenzwertregel nach l'Hospital:

$\lim(x \to 1)\frac{x^4-x}{x^2-1}$ offensichtlich wird es 0/0, wenn x gegen 1 geht. Hier kann man dennoch den Wert ausrechnen, indem man die Ableitung vom Zähler durch die Ableitung vom Nenner rechnet.

Kurvendiskussion:

<u>Nullstellen:</u> Zähler 0 setzen!
<u>Schnittpunkt mit y-Achse:</u> x=0
→ ausrechnen
<u>Extremwerte:</u> f'(x) bilden und 0 setzen. Ausrechnen. Ist dann auch noch f''(x) ungleich 0 ist der Wert gefunden.
<u>Wendepunkte:</u> Werden mit der zweiten Ableitung ermittelt, diese wird 0 gesetzt. Ist die 3. Ableitung auch ungleich 0 ist es einer.

RAD in GRAD:

Die Umrechnung zwischen Grad- und Bogenmaß ist eine einfache Sache: Ist a ein im Gradmaß gegebener Winkel, so ist sein Wert im Bogenmaß 2p × a/360°.
Umgekehrt muss ein Wert im Bogenmaß 360°/(2p) mit multipliziert werden, um den entsprechenden Winkel im Gradmaß zu bekommen.

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

Trigonometrische Funktionswerte an besonderen Winkeln

α	sin α	cos α	tan α	cot α
0	0	1	0	$\pm\infty$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	$\pm\infty$	0
π	0	-1	0	$\pm\infty$
$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	$\pm\infty$	0
2π	0	1	0	$\pm\infty$

A.3.1 Summe und Differenz:

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta\pm\cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta\mp\sin\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$
$$\cot(\alpha\pm\beta)=\frac{\cot\alpha\cdot\cot\beta\mp1}{\cot\alpha\pm\cot\beta}$$

A.3.2 Vielfache:

$$\sin2\alpha=2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$
$$\tan2\alpha=\frac{2\cdot\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$
$$\cot2\alpha=\frac{\cot^2\alpha-1}{2\cdot\cot\alpha}$$

$$\sin3\alpha=3\cdot\sin\alpha-4\cdot\sin^3\alpha$$
$$\cos3\alpha=4\cdot\cos^3\alpha-3\cdot\cos\alpha$$

$$\sin4\alpha=8\cdot\sin\alpha\cdot\cos^3\alpha-4\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\cos4\alpha=8\cdot\cos^4\alpha-8\cdot\cos^2\alpha+1$$

A.3.3 Potenzen:

$$\sin^2\alpha=\frac{1}{2}\cdot(1-\cos2\alpha)$$
$$\cos^2\alpha=\frac{1}{2}\cdot(1+\cos2\alpha)$$

$$\sin^3\alpha=\frac{1}{4}\cdot(3\cdot\sin\alpha-\sin3\alpha)$$
$$\cos^3\alpha=\frac{1}{4}\cdot(3\cdot\cos\alpha+\cos3\alpha)$$

	sin α	cos α	tan α	cot α
sin α =		$\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$
cos α =	$\sqrt{1-\sin^2\alpha}$		$\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	$\frac{\cot\alpha}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$
tan α =	$\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$		$\frac{1}{\cot\alpha}$
cot α =	$\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$	$\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\frac{1}{\tan\alpha}$	

Tabelle 6: Zusammenhänge der trigonometrischen Funktionen

Hierbei liegt α im 1. Quadranten.

7.2.3.4 Additionstheoreme:

$$\sin(z+w)=\sin(z)\cdot\cos(w)+\cos(z)\cdot\sin(w)$$
$$\cos(z+w)=\cos(z)\cdot\cos(w)-\sin(z)\cdot\sin(w)$$

7.2.3.5 Periodizität:

$$\sin\left(z+\frac{\pi}{2}\right)=\cos(z)$$
$$\cos\left(z+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin(z)$$
$$\sin(z+\pi)=-\sin(z)$$
$$\cos(z+\pi)=-\cos(z)$$
$$\sin(z+2\pi)=\sin(z)$$
$$\cos(z+2\pi)=\cos(z)$$

7.2.3.6 Ableitungen der reellwertigen Funktionen:

$$\sin'(x)=\cos(x)$$
$$\cos'(x)=-\sin(x)$$