

Produktregel:

$$y = uv \quad y' = u'v + uv'$$

Quotientenregel:

$$y = \frac{u}{v} \quad y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Kettenregel:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx} \quad \text{oder } y' = F'(u) * u'(x) \quad (\text{„Äußere Ableitung mal innere Ableitung“})$$

z.B.: $y = (4x^2 - 2x + 1)^5$ wird zu:

$$y = u^5$$

$$y' = 5u^4 \text{ (äußere)} * (8x - 2) \text{ (innere)} = 10(4x - 1) * u^4$$

→ u wieder zurückersetzen:

$$y' = 10(4x - 1)(4x^2 - 2x + 1)$$

Mittelwertsatz:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

Ist $f'(x) > 0$, zw. A und B, dann streng monoton steigend! Bzw. ist der Nenner positiv, wird xi positiv, also streng monoton steigend!

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi)$$

Bekannte Ableitungen:

f(x)	f'(x)
x^n	$n * x^{n-1}$
Sin(x)	Cos(x)
Cos(x)	-Sin(x)
Tan(x)	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
Cot(x)	$-\frac{1}{\sin^2(x)}$
e^{3x}	$3e^{3x}$
a^x	$(\ln a) * a^x$
ln x	$\frac{1}{x}$
$x\sqrt{x} = x^{3/2}$	$3/2 x^{1/2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

10^x	$\frac{1}{x \ln 10}$
$-\sin(x)$	$-\cos(x)$
$-\cos(x)$	Sin(x)
$\cos(3x)$	$-3 \sin(3x)$
$i^{(5x^2)}$	$10 i^{(5x^2)} * x$

Allgemeine wichtige Formeln:

$$\ln a/b = \ln a - \ln b$$

$$\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$$

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

Newton-Annäherungsverfahren: (Tangentenverfahren)

x_0 = Näherungswert
abschätzen (evtl. aus Skizze)

Erste Iteration bzw. Allg. Formel:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \text{ usw.}$$

Beispiel: $\sqrt[5]{11}$ soll berechnet werden!
Lösung:

1) Formel erstellen

$$x = \sqrt[5]{11}$$

2) Formel umstellen:

$$x^5 = 11$$

$$f(x) = x^5 - 11 = 0 \rightarrow f'(x) = 5x^4$$

3) Startwert „ermitteln“:

$$x_0 = 2$$

4) Einsetzen/Ausrechnen:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \frac{2^5 - 11}{5 * 2^4} = 2 - \frac{21}{80} = 1,7375$$

Taylor Polynom:

mit:
$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

Beispiel:

Taylorpolynom 2ten Grades mit Entwicklungspunkt $x_0=0$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

1) Vereinfachen:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}}$$

2) Ableitungen bilden:

$$f'(x) = 1 * (-\frac{1}{2}) * (1+x)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f''(x) = \frac{3}{4} * (1+x)^{-\frac{5}{2}}$$

3) Werte der Ableitungen an der Stelle x_0 :

$$f(x_0) = -1/2$$

$$f''(x_0) = 3/4$$

4) Aufstellen der Gleichung

$$T_2(x) = \sum_{k=0}^2 \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

$$T_2(x) = \frac{f(x_0)}{1!} (x-x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!} (x-x_0)^2$$

5) Wert der Lösung bestimmen:

Bspw.: für $x=0,2$:

Ergebnis: 0,915

6) Fehlerabschätzung:

1. Möglichkeit:

Ausrechnen mit Taschenrechner und relativen Fehler angeben, mit: 0,913 aus Taschenrechner

$$100 - (0,915 * 100 / 0,913) = 0,219 \%$$

2. Nach Lagrange

Additionstheoreme:

$$\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$$

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

Restgliedabschätzung nach Lagrange:

Taylorpolynom + Restglied

(Fehlerausgleich)

$$R_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$$

Beispielrechnung:

1) Aufstellen der Gleichung:

$$R_2(x, x_0) = \frac{f'''(\xi)}{3!} (x-x_0)^3 \text{ wobei } \xi$$

zwischen x_0 und x liegt.

2) Bilden der benötigten Ableitung (eins höher, als für Taylor verwendete!) z.B.:

$$f'''(x) = -24(4x+1)^{-\frac{3}{2}} = \frac{-24}{(4x+1)^{\frac{3}{2}}}$$

3) Einsetzen von x_0 :

$$R_2(x, 2) = \frac{-24}{(4\xi+1)^{\frac{3}{2}} * 3!} (x-2)^3$$

4) Einsetzen von x :

$$R_2(2,5;2) = \frac{-24}{(4\xi+1)^{\frac{3}{2}} * 6} (2,5-2)^3 = \frac{-4}{8(4\xi+1)^{\frac{3}{2}}}$$

5) Ausrechnen von ξ durch Einsetzen von x bzw. x_0 , weil $\xi \in (x, x_0)$:

Fehler max. werden lassen, dies ist hier bei größtem Nenner der Fall.

Implizit Differenzieren:

Differenzieren, einer gegebenen Formel:

Beispiel:
$$\ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = \alpha * h$$

Es soll durch ID die Druckänderung mit der Höhe h ermittelt werden.

Also: $\frac{dp}{dh}$ bilden

$$\ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = \alpha * h \rightarrow \left(\frac{p}{p_0}\right) = e^{\alpha * h}$$

$$\rightarrow p = e^{\alpha * h} * p_0 \rightarrow p = e^{\alpha} * e^h * p_0$$

PQ-Formel:

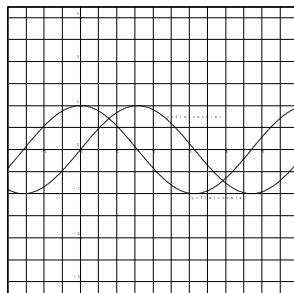
$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \text{ unter der}$$

Vorraussetzung,

dass gilt:

$$x^2 + px + q = 0 \text{ (also z.B.: } -2x^2 - 4x + 6 = 0 \rightarrow x^2 + 2x -$$

$3 = 0$)



Sinusverlauf: Der Sinus schneidet die x-Achse bei $\pi, 2\pi, 3\pi$ usw. y-Werte nie größer 1, kleiner -1. Der Cosinus ist nur um $\pi/2$ verschoben.

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

Bestimmtes Integral durch Substitution

$$\int_3^8 \frac{x \cdot dx}{\sqrt{1+x}} \quad \text{bzw.} \quad \int_3^8 x \cdot (1+x)^{-\frac{1}{2}}$$

1) Substitution wählen:

$$t = \sqrt{1+x}$$

2) Sinnvoll umstellen:

$$x = t^2 - 1$$

$$t^2 = 1 + x$$

3) Neue Grenzen berechnen

mit $t = \sqrt{1+x}$ neue Grenzen ausrechnen, indem a bzw. b für x eingesetzt werden! „Neue Variable – Neue Grenzen“

$$\text{hier also: } \int_3^8 \rightarrow \int_2^3$$

3) dt nach dx differenzieren:

$$\frac{dt}{dx} = 1 \cdot \frac{1}{2} (1+x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$dt = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{1+x}} dx$$

$$dx = dt \cdot 2 \cdot \sqrt{1+x}$$

$$dx = dt \cdot 2 \cdot t$$

4) Integral aufstellen:

$$\int_2^3 \frac{t^2 - 1}{t} \cdot 2t \cdot dt$$

$$= 2 \cdot \int_2^3 (t^2 - 1) \cdot dt$$

$$= 2 \cdot \int_2^3 t^2 \cdot dt - \int_2^3 1 \cdot dt$$

$$= 2 \cdot \left(\left[\frac{1}{3} t^3 \right]_2^3 - \left[\frac{1}{1} t \right]_2^3 \right) = 2 \cdot \left(\left(9 - \frac{8}{3} \right) - (3 - 2) \right)$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{19}{3} - 1 \right) = 32/3$$

Stichworte: 1 Aufgeleitet ist t!
obere Grenze minus untere Grenze!

Unbestimmtes Integral durch partielle Integration

$$\int f(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x) \cdot dx$$

Bsp.:

$$\int x^2 \cdot \ln(x) dx \quad \left(\begin{array}{ll} u = \frac{1}{3} x^3 & v = \ln(x) \\ u' = x^2 & v' = 1/x \end{array} \right)$$

$$= \frac{1}{3} x^3 \cdot \ln(x) - \int \frac{1}{3} x^3 \cdot \frac{1}{x} \cdot dx$$

$$= \frac{1}{3} x^3 \cdot \ln(x) - \int \frac{x^2}{3} dx$$

$$= \frac{1}{3} x^3 \cdot \ln(x) - \frac{1}{9} x^3$$

Grenzwertregel nach l'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - x}{x^2 - 1} \quad \text{offensichtlich wird}$$

es

0/0, wenn x gegen 1 geht. Hier kann man dennoch den Wert ausrechnen, indem man die Ableitung vom Zähler durch die Ableitung vom Nenner rechnet.

Kurvendiskussion:

Nullstellen: Zähler 0 setzen!

Schnittpunkt mit y-Achse: x=0

→ ausrechnen

Extremwerte: f'(x) bilden und 0 setzen.

Ausrechnen. Ist dann auch noch f''(x) ungleich 0 ist der Wert gefunden.

Wendepunkte: Werden mit der zweiten Ableitung ermittelt, diese wird 0 gesetzt. Ist die 3. Ableitung auch ungleich 0 ist es einer.

RAD in GRAD:

Die Umrechnung zwischen Grad- und Bogenmaß ist eine einfache Sache: Ist a ein im Gradmaß gegebener Winkel, so ist sein Wert im Bogenmaß $2\pi \times a/360^\circ$.

Umgekehrt muss ein Wert im Bogenmaß $360^\circ/(2\pi)$ mit multipliziert werden, um den entsprechenden Winkel im Gradmaß zu bekommen.

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

Trigonometrische Funktionswerte an besonderen Winkeln

α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$	$\cot \alpha$
0	0	1	0	$\pm \infty$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	$\pm \infty$	0
π	0	-1	0	$\pm \infty$
$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	$\pm \infty$	0
2π	0	1	0	$\pm \infty$

A.3.1 Summe und Differenz:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta \\ \tan(\alpha \pm \beta) &= \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \cdot \tan \beta} \\ \cot(\alpha \pm \beta) &= \frac{\cot \alpha \cdot \cot \beta \mp 1}{\cot \alpha \pm \cot \beta} \end{aligned}$$

A.3.2 Vielfache:

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ \tan 2\alpha &= \frac{2 \cdot \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \\ \cot 2\alpha &= \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cdot \cot \alpha} \\ \\ \sin 3\alpha &= 3 \cdot \sin \alpha - 4 \cdot \sin^3 \alpha \\ \cos 3\alpha &= 4 \cdot \cos^3 \alpha - 3 \cdot \cos \alpha \\ \\ \sin 4\alpha &= 8 \cdot \sin \alpha \cdot \cos^3 \alpha - 4 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \\ \cos 4\alpha &= 8 \cdot \cos^4 \alpha - 8 \cdot \cos^2 \alpha + 1 \end{aligned}$$

A.3.3 Potenzen:

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha &= \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos 2\alpha) \\ \cos^2 \alpha &= \frac{1}{2} \cdot (1 + \cos 2\alpha) \\ \\ \sin^3 \alpha &= \frac{1}{4} \cdot (3 \cdot \sin \alpha - \sin 3\alpha) \\ \cos^3 \alpha &= \frac{1}{4} \cdot (3 \cdot \cos \alpha + \cos 3\alpha) \end{aligned}$$

	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$	$\cot \alpha$
$\sin \alpha =$		$\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$	$\frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}}$
$\cos \alpha =$	$\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$		$\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$	$\frac{\cot \alpha}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}}$
$\tan \alpha =$	$\frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$	$\frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}$		$\frac{1}{\cot \alpha}$
$\cot \alpha =$	$\frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha}$	$\frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\tan \alpha}$	

Tabelle 6: Zusammenhänge der trigonometrischen Funktionen

Hierbei liegt α im 1. Quadranten.

7.2.3.4 Additionstheoreme:

$$\begin{aligned} \sin(z + w) &= \sin(z) \cdot \cos(w) + \cos(z) \cdot \sin(w) \\ \cos(z + w) &= \cos(z) \cdot \cos(w) - \sin(z) \cdot \sin(w) \end{aligned}$$

7.2.3.5 Periodizität:

$$\begin{aligned} \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos(z) \\ \cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin(z) \\ \sin(z + \pi) &= -\sin(z) \\ \cos(z + \pi) &= -\cos(z) \\ \sin(z + 2\pi) &= \sin(z) \\ \cos(z + 2\pi) &= \cos(z) \end{aligned}$$

7.2.3.6 Ableitungen der reellwertigen Funktionen:

$$\begin{aligned} \sin'(x) &= \cos(x) \\ \cos'(x) &= -\sin(x) \end{aligned}$$